G. VERONESE

LA GEOMETRIA NON-ARCHIMEDEA

L'argomento da me scelto è quello stesso che ero stato invitato a trattare nel Congresso di Heidelberg, parendomi che anche oggi possa interessarVi, specialmente dopo che matematici, come il POINCARÉ, ne riconobbero l'importanza. La critica ne ha già riconosciuta la validità logica, onde piuttosto che un'esposizione sistematica, come avrei fatto ad Heidelberg, credo utile di mettere ora in rilievo alcune questioni di contenuto e di metodo, che si riattaccano coll'essenza dei principî della matematica pura e della geometria, e sulle quali non parmi siano ancora concordi i geometri, pur trattandosi di argomenti geometrici (1).

Che cosa è la Geometria non-Archimedea? È essa valida quale sistema di verità astratta? E soddisfa essa pure alle condizioni quali deve essere assoggettata ogni sistema geometrico?

Sarebbe inutile ricordare qui le discussioni secolari intorno all'infinito e all'infinitesimo attuale; nella storia troviamo matematici favorevoli e contrari, da un lato ad es. G. BERNOULLI, dall'altro GAUSS, indeciso tra l'uno e l'altro LEIBNITZ, altri invece, come G. CANTOR favorevoli all'infinito attuale e contrari all'infinitesimo attuale, considerato quale segmento rettilineo continuo.

Queste discussioni si erano, si può dire, assopite, quando l'analisi, mercè il concetto di limite, si adagiò su basi sicure nel campo della grandezza finita ed era prevalsa la tendenza contraria all'infinito ed infinitesimo attuale, provocata anche dal tentativo fallito di una geometria dell'infinito di FONTENELLE (2).

Ma nonostante che GAUSS protestasse contro l'uso nella matematica della grandezza infinita determinata, qua e là risorgevano le antiche dispute.

(1) Non essendo stata tenuta la conferenza al Congresso, perchè l'A. si è ammalato appena giunto a Roma, è mancato uno dei suoi scopi, quello cioè di promuovere una discussione in seno al Congresso medesimo intorno a questi argomenti.

(2) *Él. de Géom. de l'infini* (Paris, 1727). Vedi A., *Fondamenti di Geom.*, 1891, pag. 620, trad. tedesca di A. SCHEPP, 1894, pag. 697. Nulla hanno a che fare colla geometria non archimedea gli infiniti del FONTENELLE, contrariamente a quanto affermò il sig. CANTOR (Math. Ann., 46).

Il fatto è però che nessuno aveva definito bene che cosa intendeva per infinito e infinitesimo attuale, che possono avere, come si vide poi, forme diverse; non lo definì il BERNOULLI, nè più recentemente l'idealista del DU BOIS REYMOND. Ne è una definizione accettabile dell'infinitesimo attuale quella del POISSON. Ma d'un tratto la luce cominciava a diffondersi con l'introduzione legittima di grandezze infinite e infinitesime attuali, cioè coi numeri transfiniti di G. CANTOR, coi momenti dello STOLZ e cogli ordini di infinito delle funzioni del DU BOIS REYMOND. Ma non si trattava di infiniti e infinitesimi geometrici. Il CANTOR facendo uso dei suoi numeri transfiniti affermava di aver dimostrata la impossibilità dell'infinitesimo attuale quale segmento rettilineo continuo. O. STOLZ aveva già fatto rilevare che la questione dell'esistenza dell'infinito e dell'infinitesimo attuale dipende da un assioma secondo il quale dati due segmenti rettilinei, l'uno minore dell'altro, vi è sempre un multiplo del minore, secondo un numero intero finito, che supera il segmento maggiore. Questo assioma fu chiamato da STOLZ col nome di ARCHIMEDE, perchè è il V assioma dell'opera *De Sphoera et cylindro* del grande siracusano, ma che era stato usato anche da altri (1).

Lo STOLZ faceva rilevare che la dimostrazione del CANTOR non poteva toccare nè i suoi momenti nè gli ordini di infinito del DU BOIS REYMOND, i quali pur non soddisfacendo all'assioma d'ARCHIMEDE, non sono grandezze lineari, mentre lo STOLZ affermava pure l'impossibilità del segmento rettilineo infinitesimo attuale dando una dimostrazione dell'assioma stesso partendo dal postulato del continuo nella forma data da DEDEKIND. Anche dai postulati del continuo dati da WEIERSTRASS e CANTOR, sotto forme più proprie al calcolo, si deduce, come da quello di DEDEKIND, l'assioma di ARCHIMEDE (2).

Non si trattava adunque di vedere se esistevano grandezze infinite ed infinitesime, bensì se esistevano segmenti rettilinei infiniti e infinitesimi attuali, tali da soddisfare le proprietà fondamentali della retta, eccetto l'assioma d'ARCHIMEDE.

E le vie ordinarie sembravano chiuse dopo le dimostrazioni di CANTOR e di STOLZ. Non era dunque per via analitica che potevano presentarsi spontaneamente questi segmenti, poichè i detti autori partivano dalla corrispondenza biunivoca del continuo intuitivo con quello numerico, o dai numeri transfiniti di CANTOR, che sembravano essere i soli numeri transfiniti, allo stesso modo che non si poteva presentare spontaneamente coll'analisi lo spazio generale a *infinite* dimensioni, quando si potevano considerare soltanto delle varietà a un numero finito di variabili.

(1) Vedi A., *Fondamenti di Geometria*, Appendice. A proposito delle recenti discussioni sui numeri transfiniti di CANTOR, veggasi SCHOENFLIES, *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, 1908. Per gli infiniti del DU BOIS REYMOND veggansi anche i recenti lavori di BOREL e E. BORTOLOTTI.

(2) Il prof. ENRIQUES, che nel suo scritto sui principî della geometria (Encik. der math. Wissensch.. III, 1, 1907) riferisce esattamente sulla geometria non archimedea, incorre però in un equivoco quando egli dà al postulato del continuo di CANTOR (Math. Ann., vol. V) una forma equivalente a quella da me data, concludendo che dal postulato del CANTOR non si deduce l'assioma d'ARCHIMEDE.

La risposta doveva darla il continuo rettilineo stesso, intuitivamente considerato, e diviso nei suoi possibili elementi. E allora ci siamo accorti che i postulati sunnominati del continuo contengono qualche cosa che non è suggerita necessariamente dallo stesso continuo. Questo continuo infatti ci è fornito dall'esperienza; il segnarvi dei punti per la sua determinazione o per le operazioni pratiche che dobbiamo fare con esso è un'operazione arbitraria nostra. Empiricamente lo vediamo composto di punti materiali, gli uni accanto agli altri, oppure di trattini praticamente indivisibili. Se idealizziamo il punto riguardandolo come estremità della linea, noi vediamo che esso non può comporre il continuo, perchè ci troviamo sempre dinanzi ad un segmento che comprende idealmente almeno altri punti distinti dagli estremi. Il postulato che a tutti i numeri razionali corrispondono dei punti non è praticamente verificato, e idealizzando il punto e il segmento nel senso che esso comprenda sempre dei punti distinti dagli estremi, non è più giustificata la corrispondenza biunivoca fra i punti della retta e i numeri reali ordinari. Allo Stolz avevo già osservato che l'assioma d'Archimede si deduce dal postulato del continuo di Dedekind, perchè anche questo postulato si basa sulla corrispondenza suddetta, ma che si può separare l'assioma d'Archimede da quello del continuo dando a questo la forma seguente. *Se in un segmento AB esiste un segmento (XX') variabile tale che AX sia sempre crescente e minore di AX'; e (XX') diventa indefinitamente piccolo (cioè più piccolo di ogni segmento dato), sempre decrescente, esso contiene un punto Y distinto da X e X'.*

Al postulato del continuo nella nuova forma ne va aggiunto un altro analogo a quello di Archimede, e cioè che se α e β sono due *segmenti rettilinei tali che α sia minore di β, si può costruire un multiplo α secondo un simbolo di multiplicità η che superi β.* Naturalmente se η è un numero intero finito questo postulato diventa l'assioma di Archimede.

E nei Fondamenti *ho appunto costruiti dei segmenti infiniti e infinitesimi attuali che soddisfano alla condizione che dato α come unità si può costruire β e viceversa* (1). Con questi segmenti si possono eseguire tutte le solite operazioni di addizione e di sottrazione, come si possono trovarne i multipli e summultipli eseguendo con essi varie operazioni razionali e irrazionali, *cosicchè coi simboli* (numeri) *che rappresentano questi segmenti si possono eseguire le operazioni fondamentali, per le quali valgono le regole ordinarie.* Naturalmente posta dinanzi, come si doveva, la questione dell'esistenza dei segmenti infiniti e infinitesimi attuali, la concezione aritmetica di questi numeri doveva stare *in seconda linea, perchè per ciò che dissi era opportuno affrontare dapprima tale questione non dal lato aritmetico, ma da quello geometrico.*

E fu questa insufficienza giustificata di sviluppo aritmetico che diede origine ad alcune critiche contro i nuovi infiniti e infinitesimi. Ed è perciò che il prof. Levi-

(1) Vedi anche A., *Il continuo rettilineo e l'assioma d'Archimede* (Atti R. Acc. dei Lincei 1890). Hoelder, *Der Quantität und die Lehre vom Mass* (Leipz. Ber., 1901). Anche sulla Geometria non archimedea si può parlare della misurabilità dei segmenti quando uno di essi sia preso come unità fondamentale di misura.

CIVITA, ancora quando era studente, dietro mio consiglio, trattò per primo il problema dal lato aritmetico, costruendo i detti numeri per via aritmetica e completandoli anzi con l'introduzione di nuove unità, necessarie per altre operazioni. D'altro canto il sig. HILBERT con la costruzione di un campo geometrico non-archimedeo veniva a dare una conferma autorevole alla possibilità logica di una tale geometria, e il sig. BINDONI nella sua tesi di laurea dimostrava come il campo geometrico di HILBERT sia compreso nel mio. Le recenti ricerche sulla teoria degli aggregati, anche del sig. SCHOENFLIES, confermano la validità logica di questa geometria, e le ultime ricerche sul problema del continuo rettilineo acquistano così maggior interesse, rimanendo però da stabilire in modo definitivo se, come pare, sia un solo il tipo dei numeri che vi soddisfano, anche aggiungendovi occorrendo altre unità, questioni codeste di cui si occuparono recentemente i signori HAHN, SCHOENFLIES e WAHLEN.

Assodata la validità logica del continuo rettilineo non-archimedeo, ne consegue pure quella della geometria non-archimedea, per la quale nei miei *Fondamenti* ho scelto la forma Riemanniana. E si ha che *in un campo infinitesimo intorno ad un punto, considerando soltanto i segmenti finiti fra loro, o che soddisfano all'assioma d'ARCHIMEDE, vale la geometria euclidea.* Questo teorema fu poi dimostrato dal LEVI-CIVITA anche per la geometria non-archimedea di EUCLIDE e di BOLYAI-LOBATSCHEWSKY.

E di questo teorema si possono riguardare come corollari i teoremi del sig. DEHN, trovati seguendo il metodo di HILBERT, sulle relazioni della somma degli angoli di un triangolo con le parallele condotte da un punto ad una retta, vale a dire che esistono due sistemi geometrici non-archimedei nei quali la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due o eguale a due retti, mentre da un punto si possono condurre più parallele ad una retta data (1).

La validità logica della geometria non-archimedea porta con sè l'indipendenza della teoria delle proporzioni, come quella della proiettività dal postulato di ARCHIMEDE, di cui pure si occuparono seguendo metodi più semplici altri geometri, fra i quali HILBERT e SCHUR.

***

Ma assodata la validità logica della geometria non-archimedea rimane la questione del contenuto e del metodo che furono pure oggetto di critiche, sebbene meno determinate. Permettetemi di intrattenerVi, per quanto il tempo me lo consente, su questo punto che può sembrare esorbiti dal campo matematico a chi è abituato nelle ricerche superiori della scienza a badare soltanto ai risultati, e a non dare importanza al contenuto degli oggetti matematici e al metodo, mentre il contenuto è di per sè un elemento essenziale nei principi della scienza e il metodo non bene scelto, possa anche condurre a petizioni di principio. Io mi servirò sotto altra veste di considerazioni, già vecchie, da me svolte nei *Fondamenti di Geometria*, e prima

(1) Basta infatti considerare un campo infinitesimo non archimedeo nel quale la somma degli angoli di un triangolo nella geometria Riemanniana o ellittica è maggiore di due retti e nella geometria Euclidea è eguale a due retti, e per un punto passano infinite parallele ad una retta data, quando si consideri la parte di esse rette comprese nel campo suddetto.

ancora in lezioni date all'Università di Padova tra il 1885 e il 1890 che servirono di preparazione alla pubblicazione dei *Fondamenti* stessi, tenendo ora conto delle pubblicazioni successive.

Gli oggetti della matematica pura non hanno necessariamente una rappresentazione fuori del pensiero, ad es. il numero, che è nella sua prima formazione il risultato dell'operazione mentale dell'enumerare degli oggetti anche astratti. *La verità ha il suo primo fondamento sui principî logici e su semplici operazioni mentali universalmente consentite. La libertà dello spirito nelle sue creazioni è limitata soltanto dal principio di contraddizione*, onde un'ipotesi è matematicamente possibile quando non è in contraddizione colle premesse. La matematica pura, come la logica formale, è per noi esatta.

La Geometria invece ha la sua origine nell'osservazione diretta degli oggetti del mondo esteriore, che è lo spazio fisico, e dall'osservazione idealizzata di essi trae le sue prime e precise verità indimostrabili e necessarie al suo svolgimento teoretico, che sono gli assiomi propriamente detti, come ad es. quello che per due punti nel campo della nostra osservazione passa un solo oggetto rettilineo. Ma per essere esatta la geometria *essa deve rappresentare gli oggetti forniti dall'osservazione per mezzo di forme astratte o mentali e gli assiomi con ipotesi bene determinate, indipendenti cioè dall'intuizione spaziale*, cosicchè la geometria diventi parte della matematica pura, ossia dell'estensione astratta (Ausdehnungslehre), dove il geometra proceda nelle sue costruzioni senza bisogno di vedere se esse abbiano o no una rappresentazione esteriore, finchè non le applichi al mondo fisico, senza per questo che egli abbia ad abbandonare la visione delle figure e tutti i vantaggi che derivano dall'uso dell'intuizione nella ricerca geometrica. Epperò la esattezza della geometria sarà tanto maggiore quanto più sicura sarà quella degli assiomi suggeriti dall'osservazione e quindi quanto più essi saranno semplici e nel minor numero [1]. Ed invero l'osservazione non è che approssimativa e talora anche apparente e fallace, come quando muovendoci noi vediamo cambiare la grandezza degli oggetti, mentre dalle leggi della prospettiva si sa che tale fatto non sussiste. Evitando ad es. l'assioma fondamentale del piano, riducendo cioè gli assiomi a quelli più semplici della retta e fra due rette, non solo si rimedia al difetto riscontrato da Gauss in quell'assioma, ma si risparmia la dimostrazione della possibilità di tale assioma quando lo si estende a tutto il piano illimitato, oltre che si dà alla costruzione dello spazio a quattro dimensioni la stessa origine geometrica di quella del piano e dello spazio ordinario. Certo che la richiesta della semplicità e del minor numero degli assiomi conduce a inevitabili e minuziose ricerche. E questa minuziosità fa perdere di vista i concetti generali e costituisce una delle difficoltà nella lettura di tali ricerche, ove non si supponga nulla di matematicamente noto, e si ponga dinanzi a sè tutto il pro-

[1] Anche il Klein osserva che i dati di ogni osservazione valgono sempre entro certi limiti di esattezza e sotto particolari condizioni, mentre quando stabiliamo gli assiomi possiamo porre in luogo di questi dati delle proposizioni di assoluta precisione e generalità, e facendo ricorso al principio di Mach sull'economia del pensiero egli sostiene pure che gli assiomi devono essere semplici e nel minor numero (vedi Gutacten zur Verth. des Lobatsch. Preises, nov. 1897, Kasan, oppure Math. Ann., 50, 1898; Vorles. ü. Nicht-Eucl. Geom., Bd I, 1893).

blema dei principî, come nei *Fondamenti*. È chiaro anche che gli *assiomi devono essere consentiti universalmente, epperciò possiamo ammettere come evidenti e quindi indimostrabili soltanto gli assiomi concessi dal filosofo empirista, pei quali è inutile dare la dimostrazione della loro compatibilità logica. Ma tale dimostrazione è invece necessaria quando si estendono questi stessi assiomi allo spazio illimitato*, dappoichè nessuno ha mai osservato nè potrà mai osservare un tale spazio. Ecco perchè non possiamo accettare come assioma suggerito dall'osservazione, quello delle parallele, quando si definiscono queste rette come quelle rette del piano che prolungate indefinitamente non si incontrano mai, perchè nessuno ha mai osservato due tali rette, nè possiamo ammettere come assioma primitivo tratto dall'osservazione quello ad es. che la retta illimitata è un sistema lineare aperto. *Ma gli assiomi tratti dalla pura osservazione non bastano per la ricerca geometrica. Diventata la geometria parte della matematica pura, o per meglio dire dell'estensione astratta, ammettiamo poi nella geometria tutte quelle ipotesi o postulati che non si contraddicono fra loro nè agli assiomi premessi*; le quali ipotesi o limitano o allargano il campo della geometria, come ad es., i postulati di Archimede, del continuo, degli spazi a più di tre dimensioni, ecc., o servono a scegliere una delle forme possibili determinate da assiomi o da ipotesi premesse, come il postulato delle parallele (1).

Dalle cose dette discende pure che bisogna distinguere *lo spazio fisico dallo spazio intuitivo*, che è una rappresentazione idealizzata del primo, ed è *un'intuizione, e lo spazio intuitivo dallo spazio geometrico astratto, che è un concetto*; forme codeste non bene distinte anche da autori eminenti, come da Helmholtz. *Lo spazio geometrico astratto è appunto quella parte dell'estensione pura nella quale è rappresentato lo spazio intuitivo, ma che a sua volta non ha per tutte le sue forme una rappresentazione effettiva neppure approssimativa, o non è necessario la abbia nello spazio fisico o intuitivo.* Cosicchè non solo l'eguaglianza delle figure geometriche non è necessariamente determinata dal movimento dei corpi rigidi, come riteneva Helmholtz, ma è anzi l'eguaglianza delle figure geometriche (che dipende a sua volta dal concetto logico dell'eguaglianza di due cose distinte) che è necessaria per definire il movimento dei corpi rigidi. Da ciò si ha pure un'altra conseguenza; che la geometria teoretica non è una parte della meccanica, come riteneva il Newton, e non dipende dalla fisica come opinava l'Helmholtz. *La distinzione dello spazio fisico dallo spazio geometrico porta con sè dei postulati che sono necessari soltanto per le pratiche applicazioni della geometria, come quello approssimativo del movimento dei corpi rigidi, quello delle tre dimensioni, quello pure d'Archimede, mentre vi sono postulati dello spazio geometrico, come quelli dello spazio generale, del continuo non-archimedeo, che non abbiamo bisogno di ammettere per lo spazio fisico* (2).

(1) Ad es. nelle *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert il sistema degli assiomi appare invece più come un sistema di verità astratte arbitrario che di verità fornite in parte dall'esperienza ed in parte quali verità necessarie allo svolgimento logico della geometria.

(2) A. *Fondamenti di Geom.* L'esclusione del movimento dei corpi rigidi dalla definizione dell'eguaglianza delle figure accolta anche da Hilbert (1899) e da altri, fu pure accettata, ed era più difficile, in trattati di geometria elementare dall'A. (1ª ediz. 1897) poi da Ingrami, da Enriques e

E poichè nello spazio geometrico, che come lo definii nei miei *Fondamenti*, ha *infinite dimensioni*, è rappresentato lo spazio intuitivo, noi vi possiamo lavorare con l'intuizione, immaginando in esso il punto, la retta e il piano come nello spazio ordinario e operando come nella geometria pura. Ma naturalmente non avendo nè potendo avere l'intuizione di uno spazio a quattro dimensioni, combiniamo l'intuizione coll'astrazione, come facciamo per avere lo spazio illimitato da quello intuitivo, e tanta è l'abitudine che acquistiamo, che come crediamo d'intuire tutto lo spazio illimitato, così crediamo di vedere due piani che si incontrano in un solo punto nello spazio a quattro dimensioni (1).

Nella distinzione fra spazio fisico e spazio geometrico si conciliano e l'affermazione di Stuart Mill che la retta del matematico non esiste in natura (dovrebbe dirsi più propriamente nello spazio fisico) e la osservazione del Cayley, che non potremmo affermare ciò se non avessimo il concetto della retta.

Nella geometria adunque la libertà dello spirito non è soltanto limitata dal principio di contraddizione, come nella matematica pura, ma bensì anche dai dati dell'intuizione spaziale.

Non possiamo ammettere ad es. un piano nel quale non valga il teorema di Desargues sui triangoli omologici, nè un piano nel quale una retta, che ruota intorno ad un punto non possa assumere la posizione di un'altra retta passante per lo stesso punto, come non potremo ammettere i *piani* di Bolyai-Lobatschewsky, di Riemann ed ellittico se fosse provato che intuitivamente vale il postulato di Euclide, come non potremmo ammettere una geometria nella quale la retta fosse determinata da tre anzichè da due punti, mentre queste forme sono possibili nella estensione astratta e possono avere in tutto o in parte una rappresentazione nella stessa geometria; allo stesso modo che resterebbe vera pur sempre la geometria della superficie sferica, della pseudosfera e del piano improprio all'infinito se valesse fisicamente o intuitivamente il postulato di Euclide.

Ciò contrasta, ma non contraddice al principio secondo il quale per certe categorie di proprietà possiamo ritenere equivalenti due enti diversi, ad es. due forme

---

Amaldi. Per quanto siasi molto discusso su questa esclusione, e se ne trovi qualche traccia anche negli *Elementi* di Euclide stesso, non s'era mai ottenuta effettivamente. (Vedi A., *Fond. di Geometria. Appendice*). Anche B. Russel e Poincaré ritengono che la possibilità del movimento di una figura invariabile contiene in questo senso un circolo vizioso. Anzi il Poincaré ritiene che la possibilità di questo movimento non sia una verità evidente per sè stessa, o almeno non lo sia che allo stesso modo del postulato di Euclide. Ed invero la verifica empirica del postulato delle parallele si può far dipendere da quella del movimento di una figura invariabile. Ma per la distinzione che io faccio di spazio geometrico da spazio fisico e quindi tra la geometria pura, per la quale il principio suddetto non è necessario, e le sue pratiche applicazioni, non mi accordo coll'eminente matematico francese, quando egli sostiene (senza fare la distinzione suddetta) che « en étudiant les définitions de la géométrie on voit qu'on est obligé d'admettre, sans les demontrer, non seulement la possibilité de ce mouvement, mais encore quelques unes de ses propriétés ». Questo principio e le sue proprietà sono necessarie invece per le pratiche applicazioni della geometria, come lo è l'assioma delle tre dimensioni dello spazio fisico.

(1) Ciò spiega perchè adoperiamo qui la parola *spazio* anzichè la parola *varietà*, che ha un significato più esteso ma del tutto generico ed astratto.

che si possono trasformare l'una nell'altra proiettivamente, o birazionalmente, perchè con questo principio non si tien conto delle altre proprietà geometriche o del contenuto degli enti stessi che ne costituisce invece l'essenza. Ad es. lo spazio fisico e lo spazio geometrico sono di contenuto sostanzialmente diversi fra loro, come sono diversi dalle varietà analitiche che li rappresentano, e come la esistenza dello spazio fisico, così la costruzione dello spazio geometrico costituisce un elemento essenziale della geometria, che *non va dimenticato*, come di solito avviene. E che il contenuto abbia una importanza fondamentale lo dimostra ad es. il fatto che il Cayley, il quale ha iniziato lo studio proiettivo della geometria non euclidea, riteneva valevole in senso assoluto quella euclidea, onde nelle ricerche del Cayley più che di geometria non euclidea si tratta di una rappresentazione di essa nella geometria euclidea stessa, mutando la nozione della distanza, allo stesso modo che la pseudo sfera, la sfera e il piano all'infinito improprio, sono rappresentazioni della geometria non euclidea in quella euclidea. *Ora invece il contenuto di queste geometrie ha una notevole importanza: esso ci dice che l'attuale osservazione esteriore non è sufficiente a stabilire esattamente l'una o l'altra geometria.* E un tale contenuto ha, come si vede, anche una portata filosofica per la forma dello spazio, mentre nessuna potevano averne le ricerche del Cayley, come non ne hanno la teoria degli immaginari o quella dell'infinito improprio, perchè non si tratta che di *denominazioni* usate per indicare enti già esistenti ed effettivi che nulla aggiungono alla genesi dello spazio.

Da tutto ciò emerge anche che le *ricerche matematiche sui principî della scienza sono bene distinte e devono tenersi distinte, da quelle filosofiche intorno alla genesi delle idee matematiche*: e noi stessi nel determinare il contenuto degli oggetti della matematica pura e della geometria non abbiamo inteso di partecipare per l'uno o per l'altro sistema filosofico, imperocchè accennando che il numero non ha necessariamente una rappresentazione fuori del pensiero, non abbiamo voluto affermare che il numero non sia esso stesso di origine empirica; e dicendo che il punto ha una rappresentazione empirica, non abbiamo voluto dire che non sia una pura intuizione *a priori* dello spirito e necessaria ad ogni esperienza esteriore. E questa distinzione è un bene perchè la matematica ci unisce mentre la filosofia, almeno per ora, ci divide. È vero che gli studî sui principî della scienza hanno dato e daranno ancora luogo a discussioni fra matematici, ma l'errore in matematica si va sempre eliminando, e restano le nuove idee definitivamente acquisite alla scienza. L'errore dipende o direttamente dal matematico o dalla indeterminatezza di alcune nuove idee o dalla poca chiarezza colla quale dapprima si presentano, ma spesso anche dalla contrarietà che esse incontrano da principio quando urtano vecchie convinzioni profondamente radicate e rafforzate dalla autorità di eminenti matematici, o contro la indifferenza degli uni, che per non darsi la pena di riflettere vorrebbero escludere le ricerche sui principî della scienza dal campo matematico, o l'opposizione di altri per i quali i nuovi pensatori sono i rivoluzionari della scienza. E ad oscurare la luce nascente delle nuove verità matematiche si aggiunsero quei filosofi che, fermi nei principî matematici già da essi conosciuti, vedevano o credevano di vedere nelle nuove idee un attentato alle loro ipotesi sulla conoscenza e sulla inter-

pretazione della Natura, mentre da un nuovo ordinamento dei principî suggeriti e rinvigoriti da fatti nuovi, non solo può trarre profitto la matematica, ma la stessa filosofia.

La filosofia deve perciò accettare le nuove idee matematiche quando esse sieno formate definitivamente. Però se le ricerche matematiche si devono distinguere dalle filosofiche, è opportuno d'altro canto che il matematico si astenga dal giustificare i suoi concetti con considerazioni filosofiche o con finzioni che si prestano facilmente alla critica del filosofo, come fanno ad esempio l'empirista e l'idealista del Du Bois Reymond, o come fece talora il Cantor per giustificare i suoi numeri transfiniti, i quali hanno una legittima esistenza, nonostante anche recenti critiche filosofiche. Ma d'altro canto per timore di queste critiche *il matematico non deve trincerarsi in un campo puramente astratto o in un formalismo simbolico mostrandosi indifferente dinanzi a questioni di contenuto matematico*, come è accaduto in passato e accade ancora al presente, quando si confonde la geometria con la teoria generale delle varietà di elementi puramente astratte.

Epperciò è preferibile che l'ordinamento dei nuovi principî risponda allo svolgimento logico e più semplice delle idee matematiche e quindi *il metodo non sia artificio senza vita o non appaia giuoco di simboli o di parole*, per quanto utile, *ma sia filosofico.* Così la matematica può essere anche utile alle ricerche filosofiche intorno alla genesi delle idee matematiche, allo stesso modo che essa ha pure per compito di essere utile alle scienze applicate che hanno per oggetto diretto lo studio dei fenomeni della Natura scegliendo i metodi approssimativi a questo fine più appropriati. E quando invece si segue un metodo indiretto, rappresentando ad es. lo spazio mediante una varietà a più variabili per studiarne i principî, è necessario esaminare se seguendo il contenuto dello spazio stesso, o la sua costruzione, i postulati di detta varietà possano essere giustificati senza ricorrere a concetti che con quei postulati vengono definiti, ciò che costituirebbe una petizione di principio e filosoficamente un errore.

Sulla scelta del metodo sono d'accordo i più eminenti matematici. Il Du Bois Reymond notava che se nelle operazioni coi segni nella matematica pura non si bada più al loro significato, nella discussione dei concetti fondamentali della matematica non si deve dimenticare la loro origine; e per la geometria Newton osservava giustamente che la semplicità della figura dipende dalla semplicità della genesi delle idee, cioè non dalla loro equazione, ma dalla loro descrizione, e Gauss affermava che i mezzi logici per la concatenazione e la rappresentazione delle verità geometriche per sè nulla possono produrre e soltanto germogliano senza frutto, quando la feconda e vificatrice intuizione non domini dappertutto. In modo analogo si esprimono il Weierstrass, il Lie, il Klein ed altri. E a questi concetti si uniformano i miei « Fondamenti di geometria e in modo speciale nella genesi della geometria non-archimedea ». Sta il fatto però che questo metodo, senza l'appoggio dell'analisi, quando non supponga anzi nulla di matematicamente noto, riesce nella lettura più malagevole e soltanto negli ultimi anni in Italia e fuori il metodo basato sul puro ragionamento va prevalendo nelle ricerche sui principî della geometria. Tutti ricordano la sorte toccata all'Ausdehnungslehre del Grassmann del 1844, certo migliore per metodo a quella del 1862.

Tornando alla geometria non-archimedea è necessario assicurarsi se essa soddisfa alle condizioni di contenuto e di metodo sopra enunciate. Esaminando il continuo, quale ci viene fornito dall'osservazione diretta e greggia, per due oggetti rettilinei vale l'assioma d'ARCHIMEDE, perchè qualunque essi siano, anche se non possiamo praticamente costruire un multiplo dell'uno maggiore dell'altro, potremo però considerare dei due oggetti una parte ennesima abbastanza piccola in modo che la verifica dell'assioma sia possibile per queste parti, e quindi fra i due oggetti stessi. *Ma la estensione senz'altro di questo assioma a tutto lo spazio illimitato*, non è ugualmente giustificata. Ed invero, quando noi passiamo ad ammettere che in *ogni* segmento idealizzato vi siano punti distinti dagli estremi, nè l'osservazione, nè l'intuizione ci conduce a stabilire l'assioma d'ARCHIMEDE fra due segmenti che non si possono osservare. E siccome si dimostra che se esiste un segmento infinitesimo attuale esso si può considerare rispetto a un segmento finito con infinita approssimazione come nullo, si conclude che se anche esistesse fisicamente un tale segmento, noi non potremmo vederlo. Possiamo però applicare la nostra intuizione in ogni campo di segmenti finiti, che soddisfano cioè all'assioma d'ARCHIMEDE. *La geometria non-archimedea soddisfa adunque alle condizioni che alla geometria in generale sono imposte dalla intuizione spaziale, e quindi il suo contenuto è geometricamente giustificato.*

***

Ma un altro problema, pure geometrico, s'affaccia in seguito alle nostre premesse, quello cioè se le ipotesi non confermate dall'esperienza possono avere mercè osservazioni più accurate o più estese un'effettiva rappresentazione nel mondo fisico. Fra queste ipotesi le più caratteristiche sono quelle delle parallele, del continuo e degli iperspazî. Abbiamo già osservato che se l'ipotesi euclidea fosse esclusa, non si potrebbe più parlare di spazio euclideo. Per il continuo rettilineo osserviamo invece che fisicamente l'esistenza dell'infinito e dell'infinitesimo attuale non contraddice alla nostra intuizione, però nessuna esperienza ci conduce nè ci potrà condurre fuori delle grandezze finite, solo possiamo dire, per un teorema sopra ricordato, che: *se lo spazio fisico fosse infinito attuale rispetto al campo delle nostre osservazioni, nello spazio fisico finito, supposto anche illimitato, varrebbe la geometria euclidea.*

L'ipotesi fisica invece di uno spazio a quattro o più dimensioni fu da me combattuta altrove, associandomi all'HELMHOLTZ [1]. In ogni caso nessuna utilità ci spinge a questa ipotesi, che sarebbe puramente fantastica. Eppure è curioso che certe idee siano scaturite da intuizioni anche errate. L'idea infatti di uno spazio a più di tre dimensioni non è sorta dall'Ausdehnungslehre del GRASSMANN, per il quale lo spazio fu sempre a tre dimensioni, e quindi anche la geometria, e tanto meno è sorta dal nominalismo geometrico usato dal CAYLEY, dal CAUCHY, dal RIEMANN e da altri nello studio di certe varietà analitiche a più di tre dimensioni; non dalla mia costruzione geometrica degli iperspazî, ma sorse dall'ipotesi fisica stessa, che fu la prima a presentarsi, e che ha perciò ostacolato l'accettazione dell'ipotesi matematica e ha fatto spesso confondere presso il volgo i sostenitori della geometria a più di tre dimensioni coi cosidetti *medium* alla ZÖLLNER e cogli *spiritisti*.

[1] A., *Il vero nella matematica* (discorso inaugurale, nov. 1906. Padova).

E quanto all'utilità della geometria non-archimedea osservo che non può confondersi con qualunque geometria che si ottenga tralasciando o modificando qualche assioma. La geometria non-archimedea, come la non-euclidea, ha risolto una questione sulla quale si discuteva da secoli ed ha gettato nuova luce sulla costituzione del continuo e dello spazio geometrico. E ciò basta per la matematica pura. Del resto, ogni legge matematica, essendo una legge del pensiero, è anche una legge della Natura. E per l'armonia meravigliosa che esiste fra le leggi del pensiero e quelle del mondo, fuori di esso non si può asserire *a priori* che in questo non possano avere un'applicazione utile anche le più alte e più astratte concezioni matematiche. Ma non può essere questa utilità *relativa* lo scopo diretto della ricerca matematica in generale e in particolare quella intorno ai principî della scienza; non escludiamo però, anzi vogliamo oggi più che mai che uno degli scopi più importanti della scienza sia anche quello di soddisfare ai bisogni delle scienze applicate e di corrispondere meglio che è possibile alla sua importante funzione sociale.

***

E qui, come geometri, avremmo finito. Ma se non è compito nostro di fare della filosofia, non possiamo però accettare le restrizioni del puro empirismo sull'estensione della ricerca matematica; il Pasch stesso che ha fatto un utile tentativo in questo senso, e per tante ragioni assai lodevole, non ha potuto rimanere coerente al suo programma (1). Nè possiamo quali geometri ammettere che lo spazio e i suoi postulati siano forme *a priori* dell'intuizione pura, secondo la critica di Kant, perchè nessuna prova matematica è stata data ad es. per il postulato delle parallele di Euclide, il solo che Kant conoscesse. E quei filosofi positivisti i quali combattono le ipotesi euclidee non sono meno metafisici dei kantiani. E tanto meno possiamo ammettere che pur non avendo il postulato di Euclide la stessa evidenza degli altri e possa non essere verificato da ulteriori osservazioni noi abbiamo un'intuizione *a priori* o subiettiva necessaria del postulato medesimo, la quale intuizione deriverebbe dalle rappresentazioni visive e tattili (2). E non la possiamo accettare perchè se l'esperienza non confermasse il postulato di Euclide, dovrebbero pur modificarsi le rappresentazioni visive e tattili, e quindi anche la nostra intuizione spaziale. In ogni caso nessuna prova geometrica abbiamo della necessità subiettiva del postulato di Euclide e degli altri assiomi; cosicchè il geometra non può ammettere gli assiomi dati dalle rappresentazioni visive e tattili per tutto lo spazio illimitato senza giustificare tale estensione. La nostra intuizione è fatta di osservazione e di esperienza idealizzata, perchè quando mi figuro la retta intuitivamente, non la so immaginare che come un oggetto rettilineo per quanto idealizzato, e sebbene *poi coll'astrazione* io estenda tale rappresentazione a qualunque segmento della retta illimitata. Noi ci assicuriamo infatti della presenza degli oggetti esterni e delle loro proprietà per mezzo dei sensi e delle qualità delle nostre sensazioni che essi producono in noi, e tratteniamo coll'astrazione soltanto quella dell'estensione per avere le prime forme geometriche. E così, come il linguaggio, l'intuizione spaziale è il prodotto di una lunga esperienza. Gli uomini

(1) A., *Fondam. di geometria. Appendice.*

(2) Enriques, *Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria* (Rivista filosofica di G. Cantoni. Pavia, 1903). — Enc. der Math. Wiss. (loc. cit. Einleitung).

la possedono in grado diverso; essa dovrebbe essere più perfetta nei geometri puri e nei pittori, manchevole in coloro che ciechi da giovani riacquistando la vista hanno un'intuizione imperfetta delle forme geometriche più semplici.

Il sig. B. Russel ha posto la questione dell'*a priori* sotto una nuova forma, distinguendo l'*a priori* logico dall'*a priori* psicologico, che per Kant si confondono. Ma per quanto siamo d'accordo in alcune considerazioni fondamentali, fra le quali quella dell'indipendenza della geometria dalla fisica, non posso associarmi a lui ad es. nè nella dimostrazione che lo spazio, come forma di esteriorità, debba avere un numero finito di dimensioni, mentre lo spazio generale ne ha un numero infinito, nè nell'altra, che egli tenta di dare, che tutti gli assiomi comuni alle tre geometrie non-euclidee sono necessari per ogni esperienza, mentre anche secondo lui sono di origine empirica i postulati stessi delle parallele. Sarebbe opportuno esaminare le conseguenze di tale ipotesi rispetto alla geometria non-archimedea.

Vi sono dei concetti che non ci sono dati direttamente dall'osservazione, come quello dell'illimitato, dal quale abbiamo fatto dipendere quello della dimostrazione per induzione completa, o quello dell'eguaglianza delle figure indipendentemente dal principio approssimativo del movimento dei corpi rigidi, e di questi concetti non è chiaro ancora quanta parte spetti al pensiero e quanta all'esperienza [1]. Ma per il fatto che nella geometria ai dati imprecisi dell'esperienza noi sostituiamo delle forme precise, come ad esempio quella della retta, ciò non significa che essi siano forme necessarie di ogni esperienza, perchè anche i postulati non-euclidei possono essere sostituiti mediante forme matematicamente precise, senza che si possano considerare come forme trascendentali del nostro spirito. Certo è però che la geometria teorica ha la sua origine nell'esperienza, ma può rendersene indipendente colla formulazione esatta dei suoi assiomi e delle sue ipotesi, e colla dimostrazione della possibilità così di queste ipotesi come degli assiomi quando siano estesi allo spazio illimitato, e con la costruzione di forme che non sono suggerite dall'esperienza stessa. Queste forme però sono costruzioni alle quali conducono gli assiomi tratti dall'esperienza elaborata dal pensiero logico, senza venir meno alle condizioni poste dall'intuizione spaziale.

Il pensiero, la psiche e il senso sono così intimamente connessi fra loro, che la separazione di ciò che è speciale di ciascuno è quasi sempre un problema arduo, se non d'impossibile soluzione, di guisa che la filosofia vi gira intorno da secoli senza potervi mai penetrare completamente e raggiungere una soluzione definitiva. Soltanto con la specializzazione delle ricerche e con un indirizzo sperimentale e scientifico si potrà arrivare in alcuni problemi almeno ad una sintesi filosofica chiara e sicura, onde gli scienziati specialisti potranno prepararne gli elementi. E fra questi problemi possiamo considerare quelli delle idee matematiche; alla soluzione dei quali i matematici hanno contribuito con uno dei più belli monumenti nella storia della scienza.

[1] A. *Il vero nella mat.*, nota 3.